

Об эволюции кеплеровских элементов астероида во внешней и внутренней круговой ограниченной задаче трех тел: новые результаты

Красильников П.С.¹, Доброславский А.В.¹

¹Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)

Analytical Methods of Celestial Mechanics 2024

August 19-24, 2024

Euler International Mathematical Institute, St. Petersburg, RUSSIA

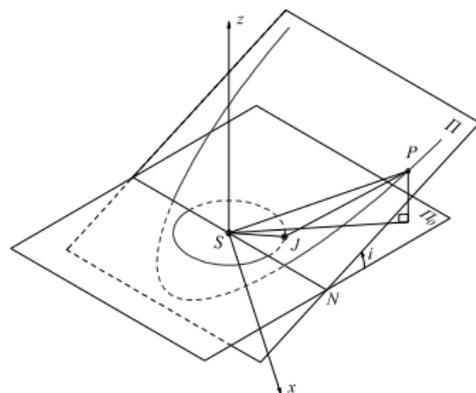
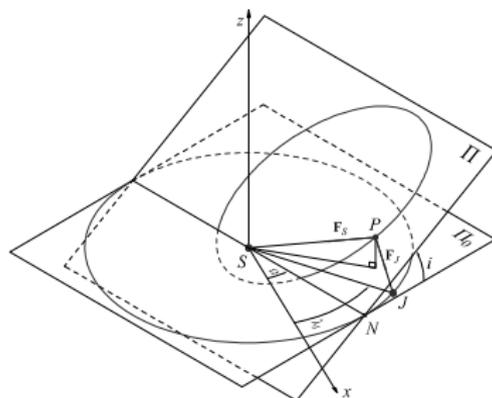
Цель исследований — получить, на основе современных информационных технологий, новые результаты в классической задаче небесной механики

- *Gauß J.C.F.* Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, 1809.
- *Von Zeipel H.* Sur l'application des series de M. Lindstedt a l'etude du mouvement des cometes periodiques. // *Astronomische Nachrichten* v. 183, 1910, p. 345–418.
- *Лидов М.Л.* Эволюция орбит искусственных спутников планет под действием гравитационных возмущений внешних тел. // *Искусственные спутники Земли* т. 8, 1961, с. 5–45.
- *Kozai Y.* The motion of a close earth satellite // *Astron. J.* 1959. V. 64. P. 367–377
- *Lidov M.L., Ziglin S.L.* The analysis of restricted circular twice-averaged three body problem in the case of close orbits. // *Celestial Mechanics* v. 9, 1974, p. 151–173.
- *Аксенов Е.П.* Осредненная ограниченная круговая задача трех тел. // *Тр. ун-та дружбы народов им. П. Лумумбы* т. 21, 1967, с. 184–202.
- *Вашковьяк М.А.* Эволюция орбит в ограниченной круговой двукратно осредненной задаче трех тел. Качественное исследование. // *Космические исследования* т. 19, 1981, с. 5–18.
- *Красильников П.С., Доброславский А.В.* Усредненная круговая пространственная ограниченная задача трех тел: внутренний вариант, новые результаты. // *ДАН*, т. 512, 2023, с. 33–41.
- *Krasilnikov P.S., Dobroslavskiy A.V.* On the Asymptotic Behavior of the Secular Perturbation Function in the Circular Restricted Three-Body Problem. // *Cosmic Res.* 62, 2024, p. 266–275.

Постановка задачи

Рассмотрим пространственную круговую задачу трех тел:

- S – центральное тело (Солнце) массы m_S
- J – возмущающее тело (Юпитер) массы m_J , вращающийся вокруг S по окружности радиуса r_J в плоскости эклиптики Π_0
- P – астероид, вращающийся по невозмущенной эллиптической орбите с большой полуосью a , эксцентриситетом e вокруг S в плоскости Π
- F_S, F_J – гравитационные силы со стороны Солнца и Юпитера
- Ω – долгота восходящего узла N
- i – наклонение
- быстрые переменные: λ_J – долгота Юпитера в плоскости Π_0 и l – средняя долгота астероида на невозмущенной орбите



Усредненная пертурбационная функция

внутренний вариант

Возмущающим фактором является гравитационное воздействие со стороны Юпитера:

$$R = f m_J \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{(\vec{r}_J, \vec{r})}{r_J^3} \right) = \frac{f m_J}{r_J} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{r_J} \right)^n P_n(\cos \gamma),$$

где \vec{r}_J – радиус-вектор Юпитера, \vec{r} – радиус-вектор астероида, Δ – расстояние от Юпитера до спутника, f – гравитационная постоянная, P_n – полином Лежандра, γ – угол между r_J и r .

Двукратное усреднение по схеме Гаусса имеет вид:

$$R^{**} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\lambda_J dl = \frac{f m_J}{r_J \sqrt{1-e^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{r_J} \right)^{2n} D_n,$$

где e , a – эксцентриситет и большая полуось орбиты астероида P ,

$$D_n = (1+e)^{2n+2} P_{2n}(0) \left(P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 2n+2; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega \right),$$

$$A_{2k}^{(2n)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 2n+2; 1-2k, 1+2k; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{(2n-2k)!}{(2n+2k)!} P_{2n}^{(2k)}(0) P_{2n}^{(2k)}(\cos i),$$

ν , ω , i – истинная аномалия, аргумент перицентра и наклонение орбиты астероида, $P_{2n}^{(2k)}$ – присоединенная функция Лежандра, $F_{2,1}$ – функция Гаусса, а $F_{3,2}^{reg}$ – регуляризованная функция Клаузена.

Усредненная пертурбационная функция

внешний вариант

Возмущающим фактором также является гравитационное воздействие со стороны Юпитера:

$$R = fm_J \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{(\vec{r}_J, \vec{r})}{r_J^3} \right) = \frac{fm_J}{r} \left(1 + \frac{r_J^3 - r^3}{r_J^2 r} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_J}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right),$$

где \vec{r}_J — радиус-вектор Юпитера, \vec{r} — радиус-вектор астероида, Δ — расстояние от Юпитера до спутника, f — гравитационная постоянная, P_n — полином Лежандра, γ — угол между r_J и r .

Двукратное усреднение по схеме Гаусса имеет вид:

$$R^{**} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} R d\lambda_J dl = \frac{fm_J}{a} + \frac{fm_J}{a\sqrt{1-e^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r_J}{a} \right)^{2n} D_n,$$

где e , a — эксцентриситет и большая полуось орбиты астероида P ,

$$D_n = (1+e)^{1-2n} P_{2n}(0) \left(P_{2n}(0) P_{2n}(\cos i) F_{2,1} \left(\frac{1}{2}, 1-2n; 1; \frac{2e}{e-1} \right) + 2 \sum_{k=1}^n (-1)^k A_{2k}^{(2n)} \cos 2k\omega \right),$$

$$A_{2k}^{(2n)} = F_{3,2}^{reg} \left(\frac{1}{2}, 1, 1-2n; 1-2k, 1+2k; \frac{2e}{e-1} \right) \frac{(2n-2k)!}{(2n+2k)!} P_{2n}^{(2k)}(0) P_{2n}^{(2k)}(\cos i),$$

i , ν , ω — наклонение, истинная аномалия и аргумент перицентра орбиты астероида, $P_{2n}^{(2k)}$ — присоединенная функция Лежандра, $F_{2,1}$ — функция Гаусса, а $F_{3,2}^{reg}$ — регуляризованная функция Клаузена.

Валидация двукратного усреднения

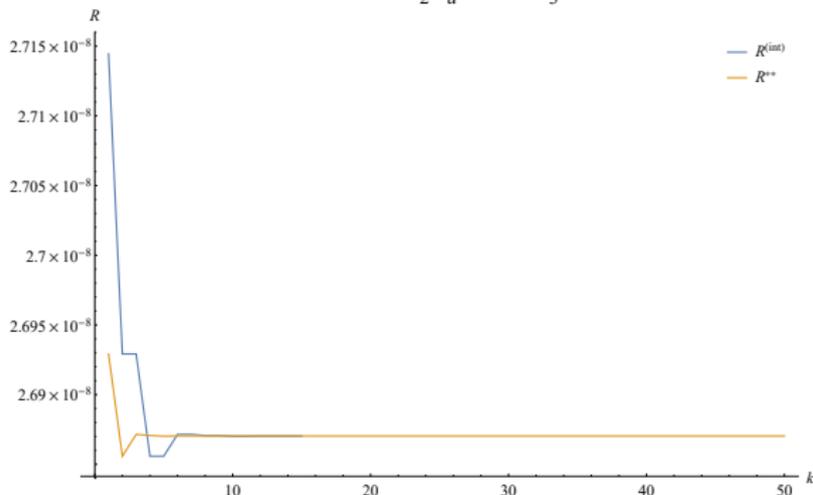
численная проверка двукратного усреднения по схеме Гаусса, внешний вариант

Результаты сравнения численного усреднения

$$R^{(int)} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f m_J}{r} \left[1 + \frac{r_J^3 - r^3}{r_J^2 r} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r_J}{r} \right)^n P_n(\cos \gamma) \right] d\lambda_J dl.$$

и R^{**} при значениях параметров: $e = 0.1$, $i = \pi/3$, $\omega = \pi/2$, $r_J/a = 0.5$, где n – число удерживаемых членов ряда

$$e = 0.1, \omega = \frac{\pi}{2}, \frac{r_J}{a} = 0.5, i = \frac{\pi}{3}$$

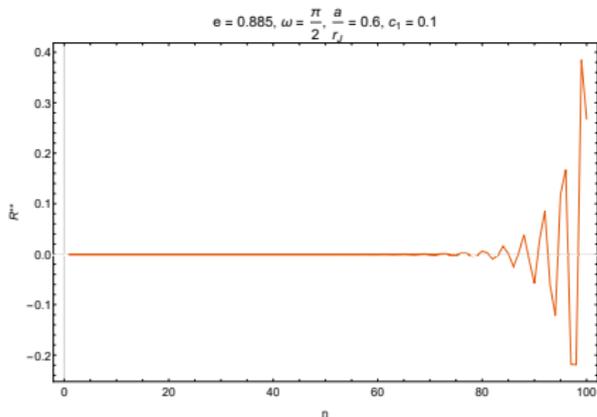


Асимптотичность усредненной пертурбационной функции

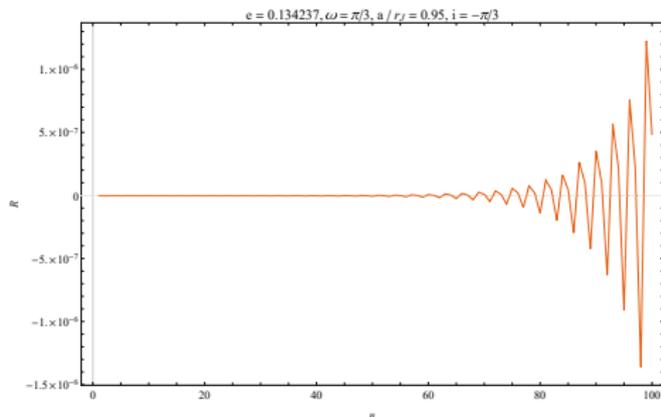
внутренний вариант

Степенной по μ ряд R^{**} называют асимптотическим по Пуанкаре, если при любом N и малом μ имеем

$$R^{**} = R_N^{**} + o(\mu^N) \Rightarrow \|R^{**} - R_N^{**}\| \sim \mu^{N+\alpha}, \alpha > 0$$



Асимптотичность ряда в общем случае



Асимптотичность ряда вдоль кривой
неаналитичности

Условия пересечения орбит

внутренний вариант

Приведем, следуя работе Цейпеля, геометрическое описание условий пересечения орбит в первом приближении метода усреднения. Имеем интегралы:

$$a = \text{const}, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1, \quad R^{**} = h, \quad (0 \leq e \leq e_*, \quad e_* = \sqrt{1 - c_1}, \quad 0 \leq c_1 < 1).$$

Условия пересечения орбит

$$\frac{a(1 - e^2)}{1 \pm e \cos \omega} = r_J$$

поскольку точки пересечения обязаны совпасть с узлами оскулирующего эллипса на плоскости орбиты Юпитера (узлам соответствуют точки орбиты при $\nu = -\omega$, $\nu = \pi - \omega$, при $i \neq 0$).

Положим

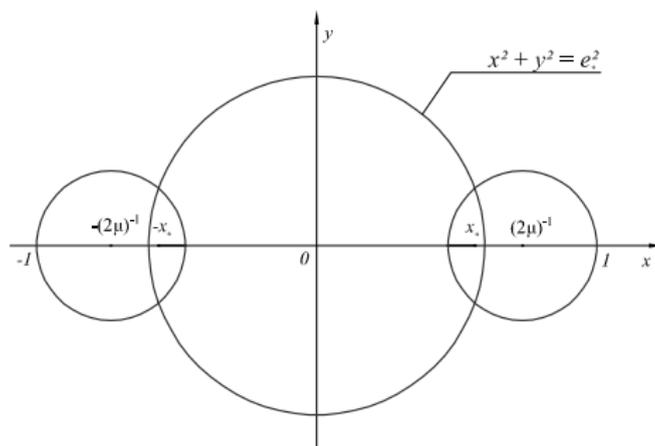
$$x = e \cos \omega, \quad y = e \sin \omega,$$

тогда условия пересечения орбит примут вид:

$$\left(x \pm \frac{1}{2\mu}\right)^2 + y^2 = \left(1 - \frac{1}{2\mu}\right)^2, \quad x^2 + y^2 \leq e_*^2, \quad \left(\mu = \frac{a}{r_J} < 1\right)$$

Геометрическая иллюстрация условий пересечения орбит

внутренний вариант



Необходимые и достаточные условия пересечения орбит:

$$(\mu^{-1} - 1) \leq e |\cos \omega| \leq |x_*| < e_*, \quad \frac{1}{2} < \mu < 1$$

В случае пересечения орбит астероид выходит за пределы сферы радиуса r_J , поэтому должна измениться структура функции R (r/r_J меняем на r_J/r). Следовательно, должна измениться вековая часть этой функции (Цейпель).

Условия пересечения орбит можно представить в виде:

$$f_1(a, e, \omega) \equiv \frac{a}{r_J} (1 - e^2) - 1 + e \cos \omega = 0, \quad f_2(a, e, \omega) \equiv \frac{a}{r_J} (1 - e^2) - 1 - e \cos \omega = 0 \quad (*)$$

Результат первого усреднения пертурбационной функции R по λ_J имеет вид (Вашковьяк, 1981):

$$R^* = (1 + r^2)^{-1/2} \Gamma\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}; 1; z\right), \quad z = \frac{4r^2 \cos^2 \varphi}{(1 + r^2)^2}$$

Кривые пересечения орбит отвечают случаю $z = 1$. Функция Гаусса имеет полюс при $z = 1$. Двукратно усредненная пертурбационная функция в окрестности кривых (*) имеет вид (Цейпель, 1910):

$$R^{**} = \pi |H_2(e, \omega, \mu, c_1)| H_3(e, \omega, \mu, c_1) + H_5(e, \omega, \mu, c_1),$$

Здесь $H_2(e, \omega, \mu, c_1) = 0$ на кривых пересечения орбит.

Итак, на кривых пересечения имеем:

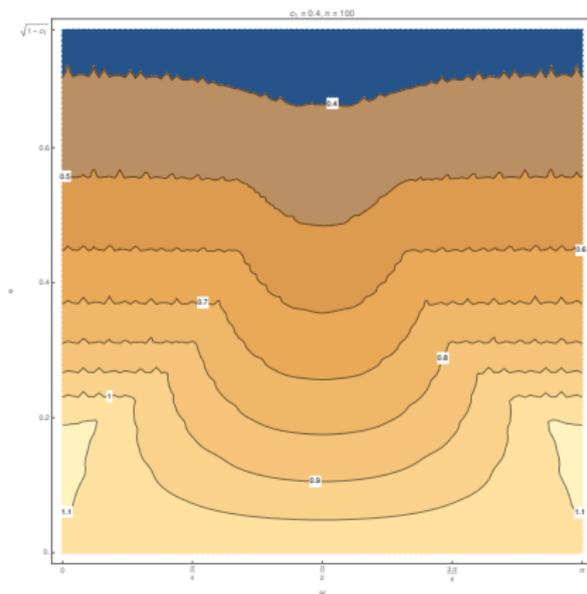
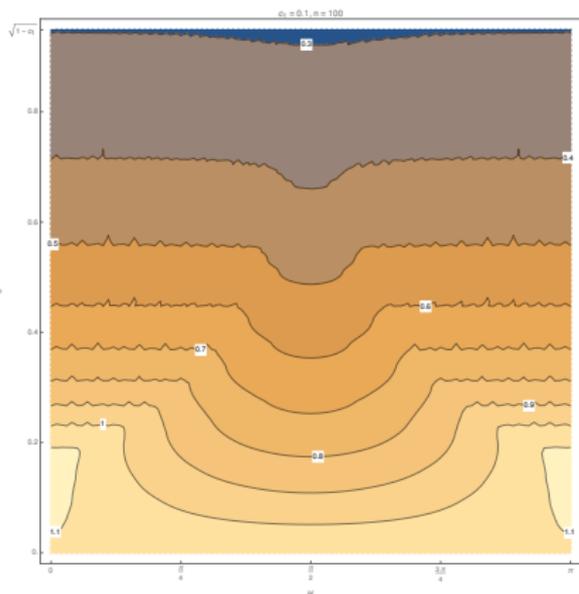
- неаналитичность функции R^{**}
- изменение представления R^{**}

Области сходимости (расходимости) ряда для функции R^{**}

внутренний вариант

Радиус сходимости степенного ряда согласно критерию Коши-Адамара

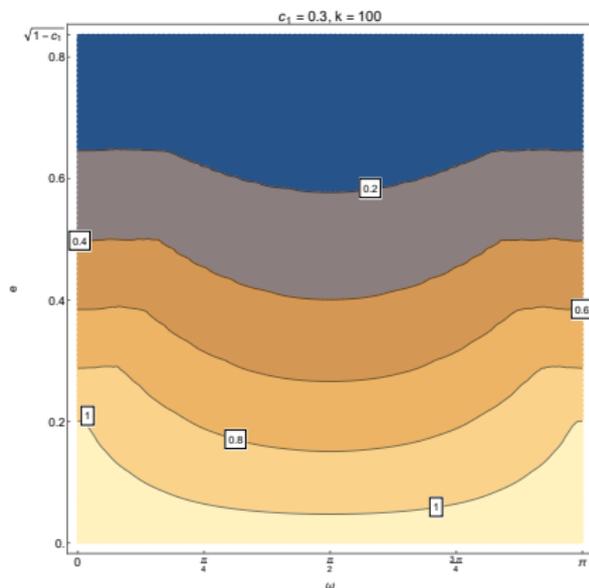
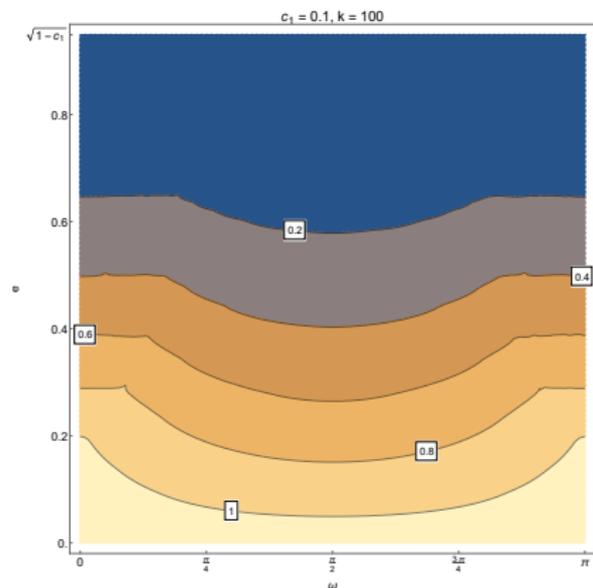
$$\rho(\epsilon, \omega, c_1) = \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|D_n|} \right)^{-1}$$



Каждая изолиния соответствует своему радиусу сходимости ряда. При фиксированном μ ряд расходится в области, расположенной выше изолинии $\rho = \mu$, сходится ниже изолинии.

Области сходимости (расходимости) ряда для функции R^{**}

внешний вариант



Усредненные уравнения в оскулирующих элементах, первые интегралы

Усредненные уравнения Лагранжа в оскулирующих элементах:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= 0, \\ \frac{de}{dt} &= -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R^{**}}{\partial \omega}, & \frac{di}{dt} &= \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial \omega}, \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial i}, & \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial R^{**}}{\partial e} - \frac{\operatorname{ctg} i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R^{**}}{\partial i}.\end{aligned}$$

Первые интегралы:

$$a = c_0, \quad (1 - e^2) \cos^2 i = c_1, \quad R^{**} = c_2$$

С помощью второго интеграла исключаем угол i из усредненной силовой функции R^{**}

$$\cos i = \pm \sqrt{\frac{c_1}{1 - e^2}}$$

получаем редуцированную систему уравнений с одной степенью свободы:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial \omega}, \quad \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \frac{\partial \hat{R}}{\partial e}$$

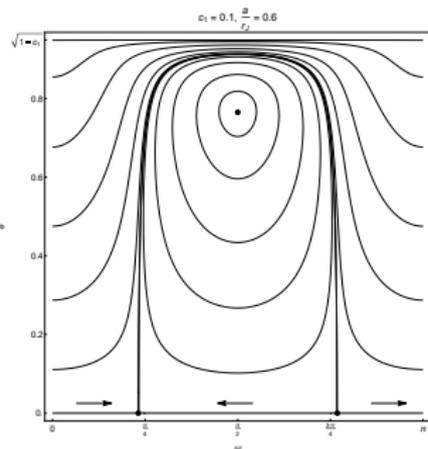
Область возможных движений:

$$0 < e < \sqrt{1 - c_1},$$

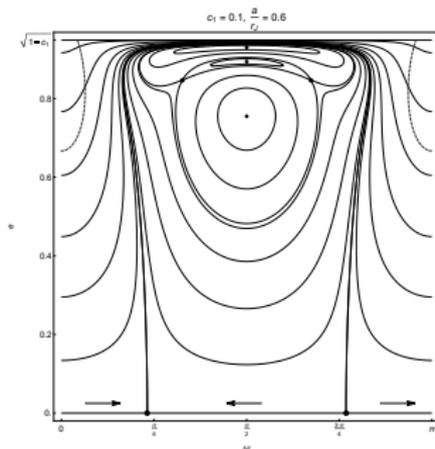
здесь $e = 0$, $e = \sqrt{1 - c_1}$ – интегральные многообразия

Фазовые портреты

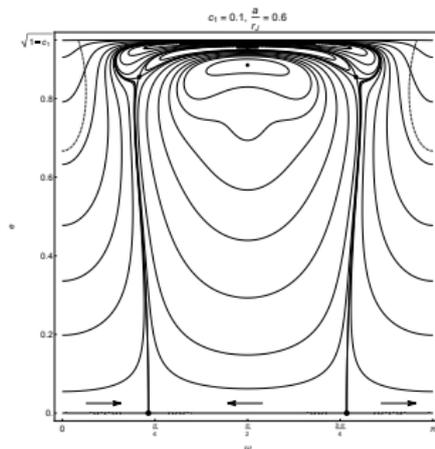
внутренний вариант



$n = 1, c_1 = 0.1, \mu = 0.6$



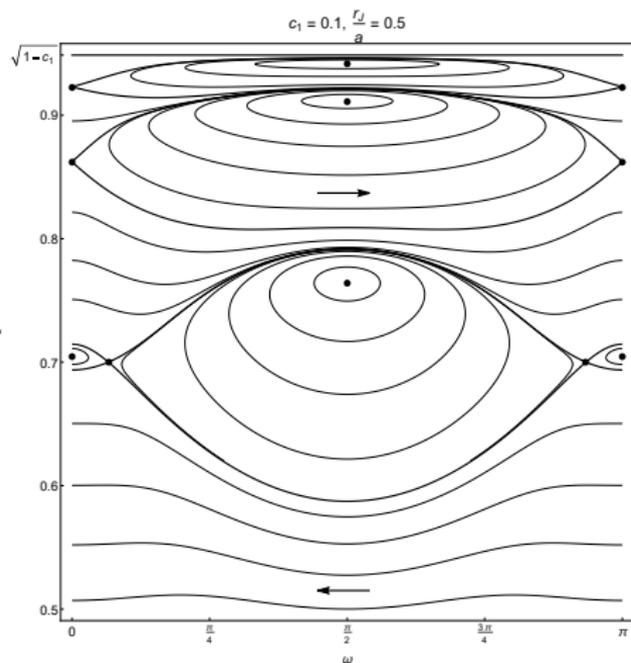
$n = 4, c_1 = 0.1, \mu = 0.6$



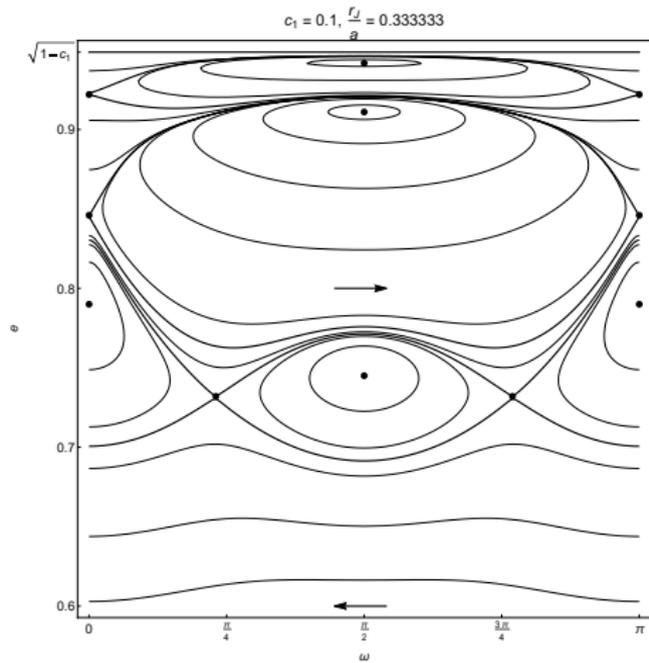
$n = 6, c_1 = 0.1, \mu = 0.6$

Фазовые портреты

внешний вариант



$n = 4, c_1 = 0.1, \mu = 0.5$



$n = 4, c_1 = 0.1, \mu = \frac{1}{3}$

Рассмотрим вопрос точности приближения. Необходима достоверность в построении фазовых портретов колебаний по аргументам e, ω . Дело в том, что для разных усечений ряда \hat{R} имеем фазовые портреты с разной топологией: последовательное удержание членов ряда все более высоких порядков малости ведет к появлению все новых и новых равновесий в окрестности $e = 1$ и нулевого значения константы Лидова-Козаи c_1 , отвечающего наклонениям i вблизи $\pi/2$ (область сильно вытянутых околополярных орбит). Достоверный фазовый портрет удовлетворяет равенству

$$\varepsilon = \mu^{2n+2},$$

где $\varepsilon = 0.0001$ — отношение массы Юпитера к массе Солнца, $\mu = a/r_J$. Здесь ε — точность приближения метода усреднения, μ^{2n+2} — точность построения фазового портрета в усредненной системе с помощью усеченного интеграла энергии

$$\hat{R}_0(e, \omega) + \mu^2 \hat{R}_1(e, \omega) + \dots + \mu^{2n} \hat{R}_n(e, \omega) = C.$$

Рассмотрим задачу о приближенном построении фазового портрета колебаний двумерной автономной динамической системы, допускающей аналитический по μ интеграл

$$H(y, x, \mu) \equiv H_0(y, x) + \mu H_1(y, x) + \mu^2 H_2(y, x) + \dots = C.$$

Теорема Пусть первый интеграл $H(y, x, \mu)$, $\mu \ll 1$ и его усеченное значение

$$\tilde{H}(y, x, \mu) \equiv H_0(y, x) + \mu H_1(y, x) + \mu^2 H_2(y, x) + \dots + \mu^n H_n(y, x) = C \quad (1)$$

есть аналитические функции в компактной области D изменения переменных x, y , когда $\mu \in [0, 1]$, при этом область D целиком состоит из точек регулярности этих функций:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H'_y \\ H'_x \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} \tilde{H}'_y \\ \tilde{H}'_x \end{pmatrix} = 1, \quad (x, y) \in D.$$

Тогда точность приближения фазового портрета колебаний семейством кривых, описываемых уравнением (1), есть величина порядка μ^{n+1} .

Итак, полагаем $\varepsilon = \mu^{2+2}$. Число n_* удерживаемых членов ряда вычисляем по формуле

$$n_* = \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{2 \ln \mu} \right\rceil - 1$$

Здесь $\lceil x \rceil = \min \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq x\}$ – функция потолка x .

Таблица значений параметра n_* при $\varepsilon = 0.955 \cdot 10^{-3}$ имеет следующий вид:

μ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
n_*	1	2	2	3	4	6	9	15	32

Новые результаты:

- Представлена усредненная пертурбационная функция в виде степенного ряда с коэффициентами, выраженными через функции Гаусса и Клаузена
- Получены необходимые и достаточные условия пересечения орбит астероида и Юпитера
- В плоскости кеплеровских элементов (e, ω) построены области сходимости и расходимости ряда при разных значениях μ и константы Лидова-Козаи c_1
- Численно доказана асимптотичность степенного ряда в областях его расходимости, что позволяет применять методы теории возмущений при больших μ
- Построены фазовые портреты колебаний в высоких приближениях метода малого параметра
- Дана оценка числа удерживаемых членов ряда в интеграле энергии, гарантирующая достоверность построения фазового портрета